Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(x_o)\frac{(x-x_o)^j}{j!}$$
$$= f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + f''(x_o)\frac{(x-x_o)^2}{2} + f^{(3)}(x_o)\frac{(x-x_o)^3}{6} + \cdots$$

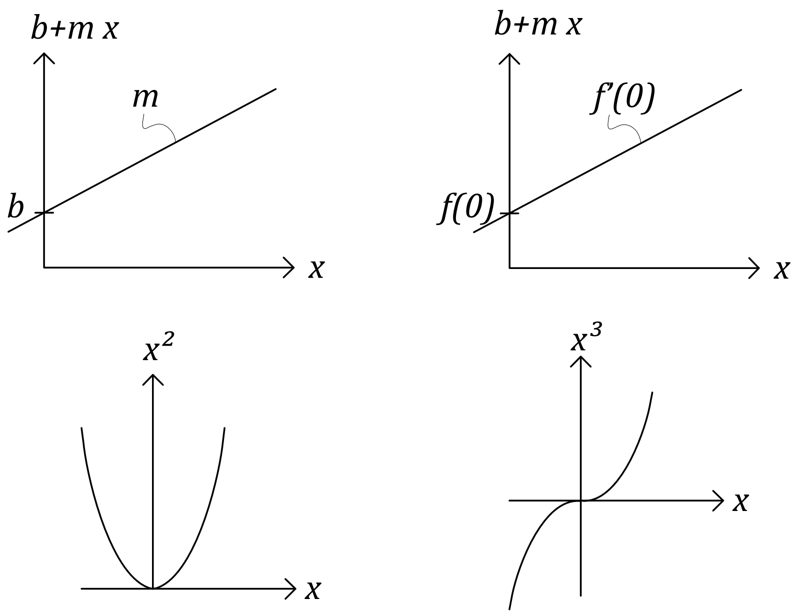
Entwickelt um $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(0)\frac{x^j}{j!} = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{x}{6} + \cdots$$

Beispiel:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots, e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots = 2{,}71828\ldots$$

Motivation:



linear: $f(x) = b + m\,x = f(0) + f'(0)\,x$

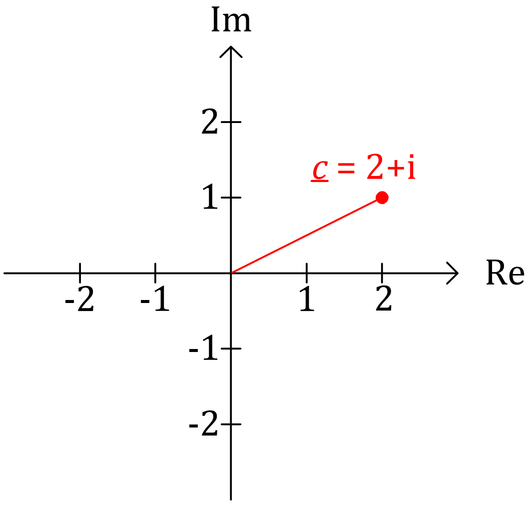
quadratisch: $f(x) = m\,x^2 = f(0) + f''(m\,x^2)\,\frac{x^2}{2} = 0 + 2\,\frac{x^2}{2}$

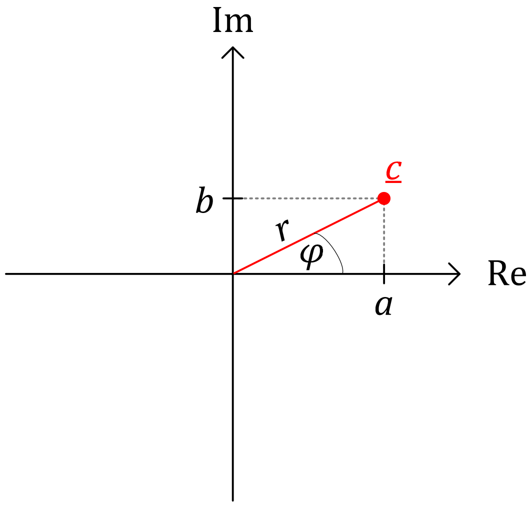
kubisch: $f(x) = m\,x^3 = f(0) + f'''(m\,x^3)\,\frac{x^3}{6} = 0 + 6\,\frac{x^3}{6}$

Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit: $\boxed{\mathrm{i} = \sqrt{-1}, \qquad \mathrm{i}^2 = -1}$

Gaußsche Zahlenebene:

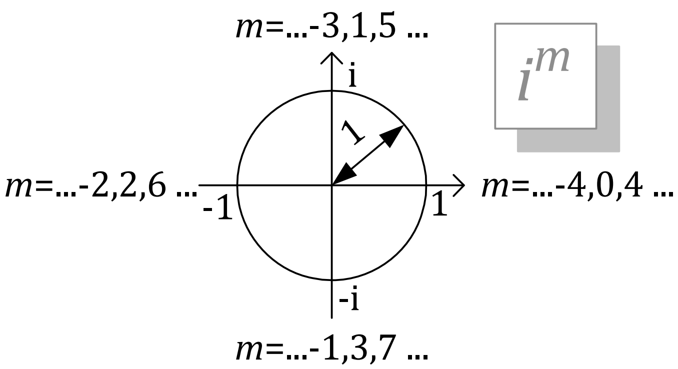




Darstellung wie bei Ortsvektoren, Symbole für komplexe Zahlen bekommen Unterstrich, z.B. $\underline{c} = a + b\,\mathrm{i}$, im Bild links: $\underline{c} = 2 + \mathrm{i}$,
a: Realteil (Einheit 1), *b*: Imaginärteil (Einheit i)

<u>Länge *r* und Winkel *φ*:</u> $\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = arctan\,(b/a)}$

Potenzen von i



Rest(m,4) = 0: $i^m = 1$

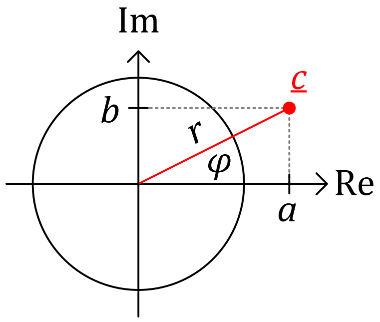
Rest(m,4) = 1: $i^m = i$

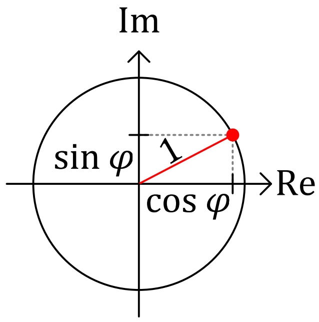
Rest(m,4) = 2: $i^m = -1$

Rest(m,4) = 3: $i^m = -i$

Inkrementierung von *m* entspricht Drehung um π/2

Polare Darstellung





$a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi \qquad \underline{c} = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)$

<u>Satz von Euler:</u> $\boxed{\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi = e^{\mathrm{i}\varphi}}$

(komplexe Exponentialfunktion)

Konstruktiver Beweis (Taylorentwicklung):

$$\cos\varphi = \cos 0 + \cos'(0)\,\varphi + \cos''(0)\,\frac{\varphi^2}{2} + \ldots = 1 - \varphi^2 + \cdots$$

$$\sin\varphi = \sin 0 + \sin'(0)\,\varphi + \sin''(0)\,\frac{\varphi^2}{2} + \ldots = \varphi - \varphi^3 + \cdots$$

$$\mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{i}\,\varphi - \mathrm{i}\,\varphi^3 + \cdots$$

$$\exp\mathrm{i}\,\varphi = \exp 0 + \exp'(0)\,\mathrm{i}\,\varphi + \exp''(0)\,\frac{\mathrm{i}^2\varphi^2}{2} + \ldots$$

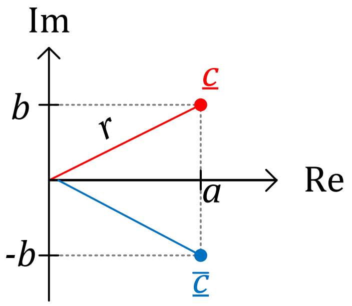
$= 1 + \mathrm{i}\,\varphi - \varphi^2 - \mathrm{i}\,\varphi^3 + \ldots = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, q. e. d.

<u>Polare Darstellung mit komplexer Exponentialfunktion:</u>

$$\boxed{\underline{c} = r\,e^{\mathrm{i}\,\varphi}}$$

Umsetzung in kartesische Darstellung $a + \mathrm{i}\ b$ mit Funktionen Re (Realteil) und Im (Imaginärteil): $a = \mathrm{Re}\left(r\,e^{\mathrm{i}\,\varphi}\right)$, $b = \mathrm{Im}\left(r\,e^{\mathrm{i}\,\varphi}\right)$

Konjugierte komplexe Zahl



$$r = \sqrt{\underline{c}\ \overline{\underline{c}}}$$

Rechenoperationen

Beispielzahlen:

$\underline{c} = a + \mathrm{i}\, b = r\, e^{\mathrm{i}\,\varphi}$

$\underline{d} = f + \mathrm{i}\, g = s\, e^{\mathrm{i}\,\theta}$

<u>Addition:</u>

$\underline{c} + \underline{d} = (a + f) + \mathrm{i}\,(b + g)$

<u>Subtraktion:</u>

$\underline{c} - \underline{d} = (a - f) + \mathrm{i}\,(b - g)$

<u>Multiplikation:</u>

$\underline{c}\ \underline{d} = r\, s\, e^{\mathrm{i}\,(\varphi+\theta)}$

oder: $\underline{c}\ \underline{d} = (a + \mathrm{i}\, b)(c + \mathrm{i}\, d) = (a\, c - b\, d) + i\,(b\, c + a\, d)$

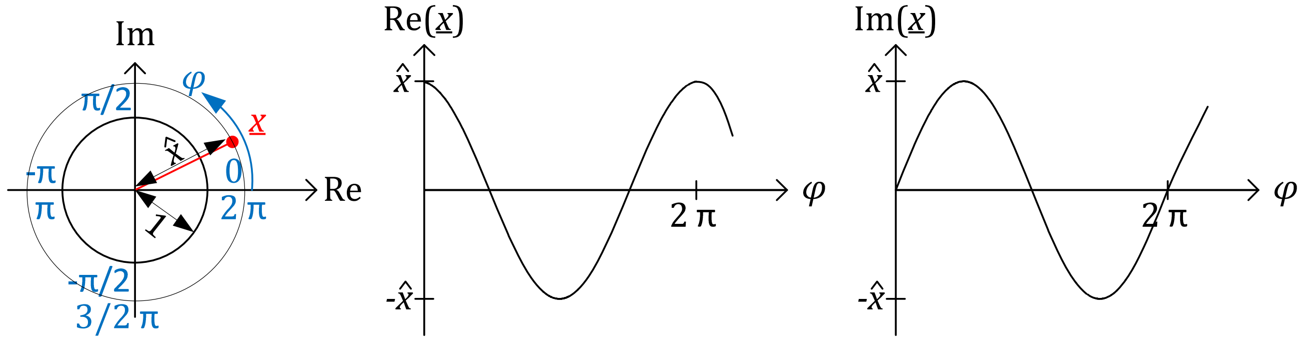
<u>Division:</u>

$\underline{c} / \underline{d} = \frac{r}{s}\, e^{\mathrm{i}\,(\varphi-\theta)}$

oder: $\underline{c} / \underline{d} = \frac{a+\mathrm{i}\, b}{c+\mathrm{i}\, d} = \frac{a+\mathrm{i}\, b}{c+\mathrm{i}\, d}\,\frac{c-\mathrm{i}\, d}{c-\mathrm{i}\, d} = \frac{(a\, c+ b\, d)+ i\,(b\, c-a\, d)}{c^2+d^2}$

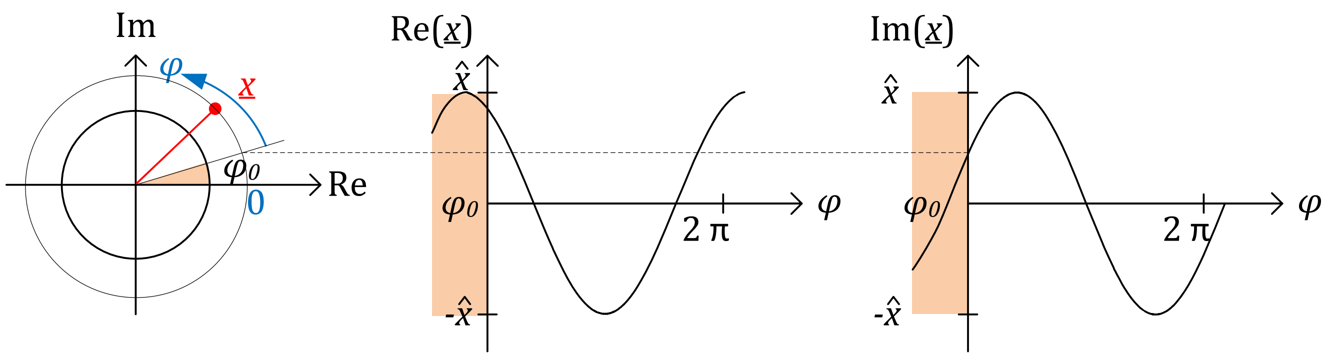
Darstellung von Schwingungen

Grundschwingung



$\underline{x}(\varphi) = \hat{x}\, e^{\mathrm{i}\,\varphi}$ $\quad$ $\mathrm{Re}[\underline{x}(\varphi)] = \hat{x}\cos(\varphi)$ $\quad$ $\mathrm{Im}[\underline{x}(\varphi)] = \hat{x}\sin(\varphi)$

Schwingung mit Phasenversatz



φ_0: Phasenversatz

Vorlaufen um Phasenversatz -> Phasenversatz bildet Vorlauf

$\underline{x}(\varphi) = \hat{x}\, e^{\mathrm{i}\,(\varphi+\varphi_0)}$

$\mathrm{Re}[\underline{x}(\varphi)] = \hat{x}\cos(\varphi + \varphi_0)$

$\mathrm{Im}[\underline{x}(\varphi)] = \hat{x}\sin(\varphi + \varphi_0)$

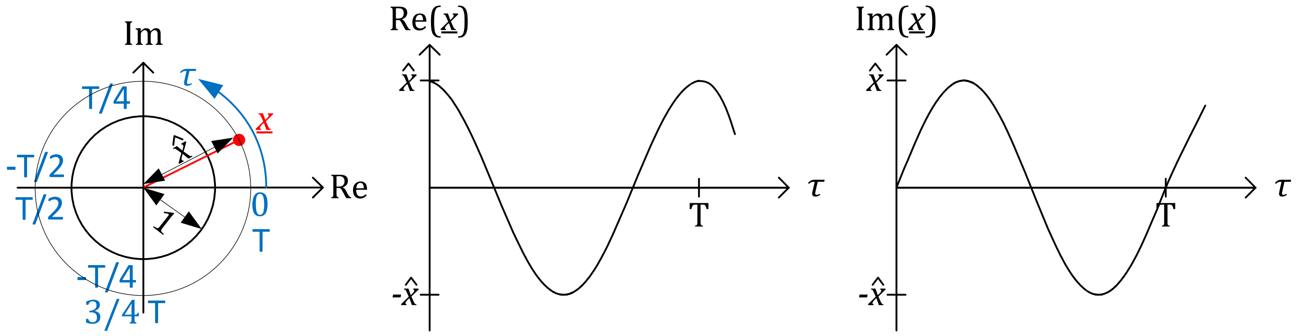
Kreisfrequenz

allgemein als Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \dot{\varphi} \Leftrightarrow \varphi = \int \omega \, \mathrm{d}\tau$

für $\omega = \text{const}$ und $\varphi(0) = 0$: $\quad \varphi = \omega\, \tau$

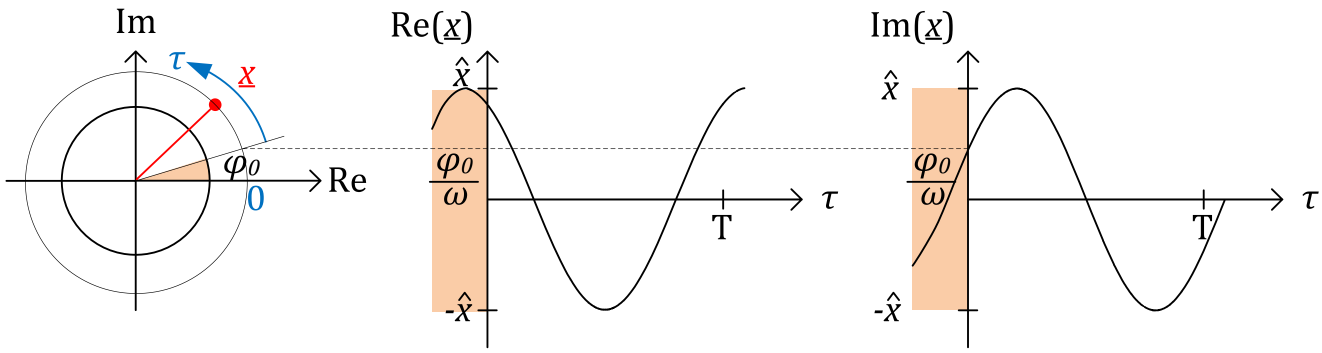
speziell für Schwingungen mit Periode T: $\omega = 2\,\pi / T \Leftrightarrow \varphi = 2\,\pi\, \frac{\tau}{T}$

<u>Schwingungsdarstellung für konstantes ω:</u>



$\underline{x}(\varphi) = \hat{x}\, e^{\mathrm{i}\,\omega\,\tau}$ $\qquad$ $\mathrm{Re}[\underline{x}(\tau)] = \hat{x}\, \cos(\omega\,\tau)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}[\underline{x}(\tau)] = \hat{x}\, \sin(\omega\,\tau)$

<u>Mit Phasenversatz:</u>



$\underline{x}(\varphi) = \hat{x}\, e^{\mathrm{i}\,(\varphi_0 + \omega\,\tau)}$

$\mathrm{Re}[\underline{x}(\tau)] = \hat{x}\, \cos(\varphi_0 + \omega\,\tau)$

$\mathrm{Im}[\underline{x}(\tau)] = \hat{x}\, \sin(\varphi_0 + \omega\,\tau)$